Tarea IX

Román Contreras

27 de mayo de 2018

0.1. Superficies cuadricas y el teorema espectral para operadores autoadjuntos

Sea $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base ortonormal y T una transformación lineal.

Recordemos que en clase definimos las *funciones coordenadas* asociadas a la base β como:

$$\begin{aligned} X : & Vec_{\mathcal{O}} \to \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto \langle v, \vec{w}_1 \rangle \\ Y : & Vec_{\mathcal{O}} \to \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto \langle v, \vec{w}_2 \rangle \\ Z : & Vec_{\mathcal{O}} \to \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto \langle v, \vec{w}_3 \rangle \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} X(\vec{v}) &= \langle v, \vec{w}_1 \rangle \\ Y(\vec{v}) &= \langle v, \vec{w}_2 \rangle \\ Z(\vec{v}) &= \langle v, \vec{w}_3 \rangle \end{aligned}$$

Al igual que todas las funciones que toman valores reales, las funciones coordenadas pueden ser sumadas y multiplicadas, tanto unas con otras, como con números reales. En particular, expresiones como $X^2 + XY$, o $XY - YZ$, tienen sentido, y definen nuevas funciones que toman valores reales.

Definicion 0.1. *Una* forma cuadrática Q *(en tres variables) es una expresión de la forma:*

$$aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$$

Dicha expresión define una función de $Vect_{\mathcal{O}}$ en $\mathbb{R}$. Usualmente no haremos distinción entre la expresión y la función que define. En oacasiones también escribiremos $Q(\vec{v})$ para referirnos a $(aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2)(\vec{v})$

En clase demostramos la siguiente proposición.

Proposicion 0.1. *Sea $aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$ una forma cuadrática. Entonces existe una transformación lineal T, que es autoadjunta, y tal que para todo vector $\vec{v}$ se cumple que:*

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = (aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2)(\vec{v})$$

Más aún, la matríz de la transformación T en la base β está dada por:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & d & \frac{e}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

Dada una transformación lineal y autoadjunta T, a la forma cuadrática que resulta de la expresión $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle$ le llamaremos la *forma cuadrática asociada a T*.

Definicion 0.2. *Dada una forma cuadrática, $Q = aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$, la* superficie cuadrica *asociada a la forma cuadrática es el conjunto de todos los puntos que tales que $Q(\vec{v}) = 1$, es decir:*

$$\{\vec{v} \in Vect_{\mathcal{O}} \mid Q(\vec{v}) = 1\}$$

Definicion 0.3. *El* plano coordenado *$P_{X=k}$ con $k \in \mathbb{R}$ es el plano perpendicular a la recta generada por el vector $\vec{w}_1$ y que intersecta dicha recta en el punto $k\vec{w}_1$. Alternativamente lo podemos describir como el conjunto:*

$$\begin{aligned} P_{X=k} := & \quad \{\vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle = k\} \\ = & \quad \{k\vec{w}_1 + \lambda\vec{w}_2 + \mu\vec{w}_3 | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Es decir, $P_{X=k}$ es el conjunto de todos los vectores cuya primera coordenada es c.

Análogamente podemos definir los planos $P_{Y=k}$ y $P_{Z=k}$.

Por el teorema espectral, toda forma cuadrática es equivalente a una de la forma $aX^2 + bY^2 + cZ^2$ en alguna base β, por lo que basta clasificar estas formas cuadráticas y sus superficies cuádricas asociadas.

Existen tres casos diferentes:

0.2. El caso $a, b, c > 0$:

Sea Q una forma cuadrática tal que $Q(\vec{v}) = (aX^2 + bY^2 + cZ^2)(\vec{v})$, es decir, su transformación adjunta asociada T tiene una matríz diagonal con valores propios a, b, c. Asumamos además que todos estos valores propios son positivos.

Ejercicio 0.1. *Demuestra que existe una constante $K > 0$ tal que la intersección de $P_{Z=K}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es un punto. Es decir, demuestra que existe un único vector $\vec{v} = x\vec{w}_1 + y\vec{w}_2 + z\vec{w}_3$ que simultáneamente satisface $\langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle = K$ y que $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 1$.*

Ejercicio 0.2. *Sea k una constante, demuestra que la intersección de $P_{Z=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es:*

1. *Si $|k| > K$, entonces es vacía,*

2. *si $|k| = K$, entonces es un único punto,*

3. *si $|k| < K$, entonces es una elipse.*

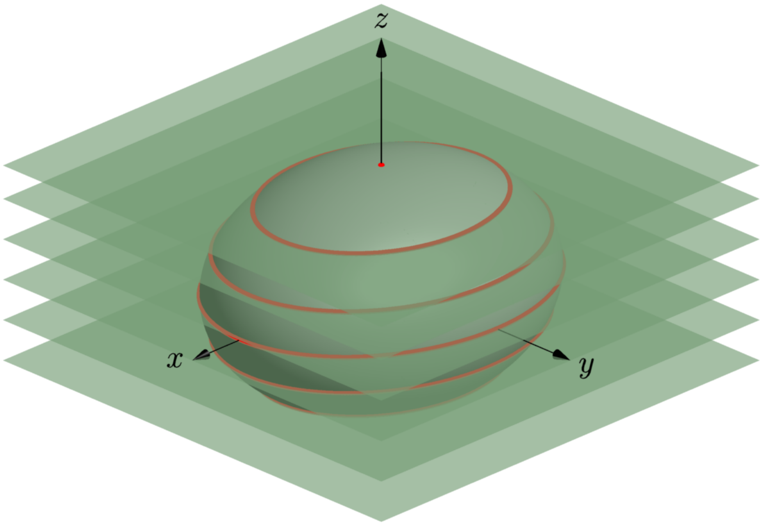

Figura 1: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k, y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} + \frac{3y^2}{10} + \frac{z^2}{2} = 1$

0.3. El caso $a, b > 0$ pero $c < 0$:

Sea Q una forma cuadrática tal que $Q(\vec{v}) = (aX^2 + bY^2 + cZ^2)(\vec{v})$, es decir, su transformación adjunta asociada T tiene una matríz diagonal con valores propios a, b, c. Asumamos además que a y b son positivos, pero c es negativo.

Ejercicio 0.3. *Sea k una constante. Demuestra que la intersección de $P_{Z=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es una elipse para todo k. Demuestra además que todas estas elipses tienen la misma excentricidad y que la elipse de menor tamaño es la correspondiente a la constante $k = 0$.*

Ejercicio 0.4. *Demuestra que exite una constante K tal que la intersección de $P_{Y=K}$ con la superficie cuádrica asociada a Q son dos rectas.*

Ejercicio 0.5. *Sea k una constante, demuestra que la intersección de $P_{Y=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es:*

1. *Si $|k| > K$, una hipérbola, que abre en la dirección del eje z*
2. *si $|k| = K$, dos rectas*
3. *si $|k| < K$, una hipérbola, que abre en la dirección del eje y.*

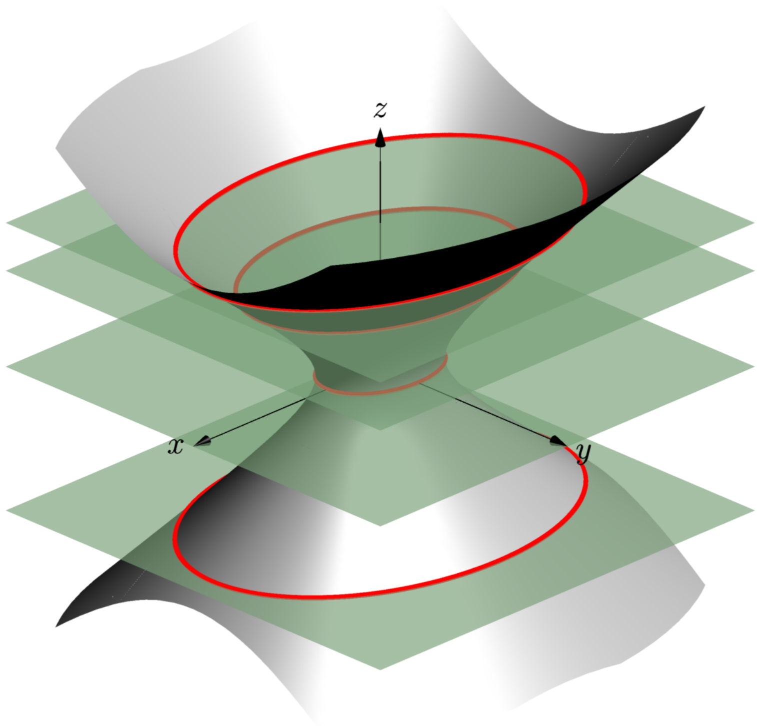

Figura 2: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k, y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} + \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$

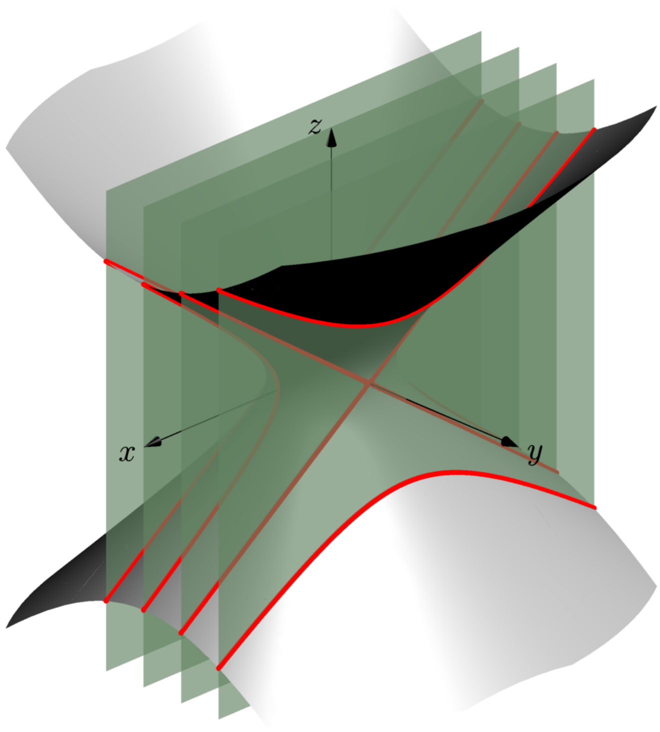

Figura 3: Planos $P_{Y=k}$ para diferentes constantes k, y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} + \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$

0.4. El caso $a > 0$ pero $b, c < 0$:

Sea Q una forma cuadrática tal que $Q(\vec{v}) = (aX^2 + bY^2 + cZ^2)(\vec{v})$, es decir, su transformación adjunta asociada T tiene una matríz diagonal con valores propios a, b, c. Asumamos además que a es positivo, pero b y c son negativos.

Ejercicio 0.6. *Sea k una constante. Demuestra que la intersección de $P_{Z=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es una hipérbola para todo k.*

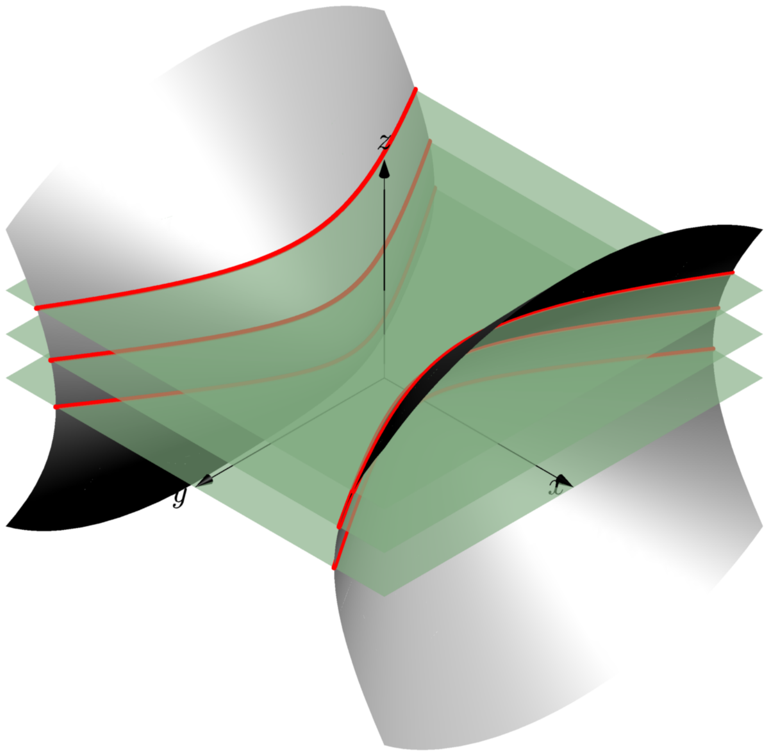

Figura 4: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k, y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} - \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$

Ejercicio 0.7. *Demuestra que exite una constante K tal que la intersección de $P_{X=K}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es un punto.*

Ejercicio 0.8. *Sea k una constante, demuestra que la intersección de $P_{X=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es:*

1. *Si $|k| > K$, una elipse.*
2. *si $|k| = K$, un punto*
3. *si $|k| < K$ vacía.*

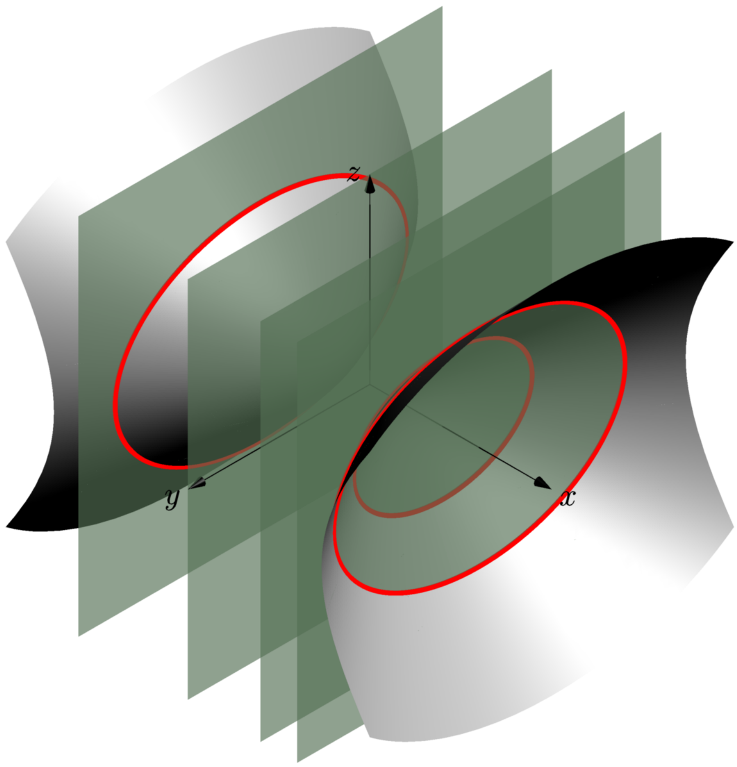

Figura 5: Planos $P_{X=k}$ para diferentes constantes k, y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} - \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$