Tarea VI

Román Contreras

13 de abril de 2018

1. Transformaciones lineales y matrices

1.1. Más propiedades de las transformaciones lineales

Recuerda que hemos estado utlizando las siguientes notaciones y convenciones:

Fijamos un punto en el espacio al que denotamos $\mathcal{O}$ y al que llamamos el origen. Una vez que hemos fijado el origen, consideramos el conjunto de todos los vectores basados en $\mathcal{O}$, mismo que denotamos por

$$Vect_{\mathcal{O}}$$

y que denotamos los elementos de dicho conjunto por $\vec{v}, \vec{w}, \ldots$ etc.

Definicion 1.1. *Sea $T : Vect_{\mathcal{O}} \to Vect_{\mathcal{O}}$ una transformación lineal. Definimos las* potencias *de T recursivamente de acuerdo a las siguientes reglas:*

1. *$T^0 = Id$ la transformación identidad*
2. *$T^{n+1} = T \circ T^n$*

Si además T es invertible, definimos T^{-n} como $(T^{-1})^n$

Es decir, T^n es la transformación T compuesta n veces consigo misma.

Ejercicio 1.1. *Demuestra que si T es una transformación lineal y m y n son enteros positivos, entonces se cumple que $T^m \circ T^n = T^{m+n}$. Si además T es invertible, demuestra que la igualdad anterior es válidad para m y n cualesquiera dos enteros (no necesariamente positivos).*

Ejercicio 1.2. *Sea T una homotecia con factor λ, es decir, $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ para todo vector $\vec{v}$. Demuestra que T es lineal. Calcula T^n para todo entero positivo n. Si $\lambda \neq 0$ demuestra que T es invertible y calcula T^{-n} para todo entero positivo n. En cualquier caso, demuestra que T^n es también una homotecia.*

Ejercicio 1.3. *Sea $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base ortonormal. Sea T la rotación de un ángulo α con eje de rotación dado por $\vec{w}_1$ y con sentido de $\vec{w}_2$ a $\vec{w}_3$, es decir:*

$$T(\vec{w}_1) = \vec{w}_1$$
$$T(\vec{w}_2) = \cos(\alpha)\vec{w}_2 + \sin(\alpha)\vec{w}_3$$
$$T(\vec{w}_3) = -\sin(\alpha)\vec{w}_2 + \cos(\alpha)\vec{w}_3$$

Demuestra que T es invertible.

Calcula T^n para todo entero n.

Ejercicio 1.4. *Sea T como en el ejercicio anterior. Demuestra que si el ángulo de rotación α es un múltiplo racional de π, es decir, $\alpha = \frac{m}{n}\pi$, entonces existe un entero k tal que $T^k = Id$.*

1.2. Algunas matrices importantes

Recordemos la definición de la matríz de una transformación lineal.

Sea $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base ortonormal y T una transformación lineal.

La matríz de T con respecto a β es la matríz:

$$[T]_\beta = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(\vec{w}_1)]_\beta & [T(\vec{w}_2)]_\beta & [T(\vec{w}_3)]_\beta \end{array} \right)$$

es decir, la matríz cuya enésima columna es el vector de coordenadas del vector $T(\vec{w}_n)$ en la base β.

Recuerda que en clase demostramos que si S y T son dos transformaciones lineales, entonces $[T \circ S]_\beta = [T]_\beta [S]_\beta$, es decir, el producto de matrices corresponde a la composición de transformaciones lineales.

Ejercicio 1.5. *Calcula las matrices de las siguientes transformaciones (la base y las transformaciones son como en los ejercicios anteriores):*

1. *La matríz de una homotecia de factor λ*
2. *La matríz de una rotación de ángulo α con eje de rotación $\vec{w}_1$*
3. *La matríz de la proyeción en el plano generado por $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$*
4. *Las potencias de las matrices arriba mencionadas.*

Ejercicio 1.6. *Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores linealmente independientes. Supongamos que sus coordenadas en la base β están dadas por $\vec{v}_\beta = (a, b, c)$ y $\vec{w}_\beta = (d, e, f)$. Sea T la proyección ortogonal en el plano generado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*

Demuestra que $T \circ T = T$. Calcula la matríz $[T]_\beta$.

Ejercicio 1.7. *Sea T una transformación lineal. Demuestra que si $M = [T]_\beta$ es la matríz de T con respecto a la base β, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M cumple $M^T M = Id$*
2. *T es una isometría*

A las matrices que cumplen la propiedad 1 se les llama matrices ortogonales.