Tarea V

Román Contreras

6 de abril de 2018

1. Transformaciones

1.1. Propiedades de las transformaciones lineales

Recuerda que hemos estado utlizando las siguientes notaciones y convenciones:

Fijamos un punto en el espacio al que denotamos $\mathcal{O}$ y al que llamamos el origen. Una vez que hemos fijado el origen, consideramos el conjunto de todos los vectores basados en $\mathcal{O}$, mismo que denotamos por

$$Vect_{\mathcal{O}}$$

y que denotamos los elementos de dicho conjunto por $\vec{v}, \vec{w}, \dots$ etc.

Definicion 1.1. *Una* transformación lineal *es una función*

$$T : Vect_{\mathcal{O}} \to Vect_{\mathcal{O}}$$

tal que para cualesquiera dos vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y cualquier número real $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$T(\vec{v} + \lambda\vec{w}) = T(\vec{v}) + \lambda T(\vec{w})$$

Ejercicio 1.1. *Demuestra que la función identidad Id, es decir, la función tal que $Id(\vec{v}) = \vec{v}$ para todo vector $\vec{v}$ es una función lineal.*

Demuestra que si S y T son dos transformaciones lineales, entonces la transformación $S \circ T$ es también una transformación lineal.

Demuestra que si T es una transformación lineal que además es una función biyectiva, entonces existe otra transformación lineal S tal que $T \circ S = Id$ y $S \circ T = Id$.

Ejercicio 1.2. *Sea T una transformación lineal. Demuestra que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es una función inyectiva*
2. *El único vector $\vec{v}$ que satisface que $T(\vec{v}) = \vec{0}$ es el vector $\vec{0}$*
3. *Si un conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(\vec{v}), T(\vec{w}), T(\vec{z})\}$ también es linealmente independiente*

1.2. Isometrías

Definicion 1.2. *Decimos que una transformación T (no necesariamente lineal) es una isometría si preserva la distancia entre cualquier par de puntos. Dicho de otro modo, dados cualesquiera dos puntos p y q, se cumple que:*

$$d(p, q) = d(T(p), T(q))$$

.

Recuerda que en clase demostramos que toda isometría que fija al origen preserva el producto interior, es decir, si T es una ismometría y $T(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces, dados cualesquiera dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se cumple que:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle$$

Ejercicio 1.3. *Sea T una isometría que fija al origen y sea $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base ortonormal. Demuestra que el conjunto $\{T(\vec{w}_1), T(\vec{w}_2), T(\vec{w}_3)\}$ es también una base ortonormal.*

Ejercicio 1.4. *Demuestra que una isometría que fija al origen es necesariamente inyectiva.*

Ejercicio 1.5. *Demuestra que una isometría que fija al origen es necesariamente suprayectiva.*

Ejercicio 1.6. *Los dos ejercicios anteriores implican que si T es una isometría que fija al origen, entonces T es biyectiva. Además, sabemos que T es una transformación lineal, por lo que el ejercicio 1.1 implica que existe otra transformación lineal S tal que $T \circ S = S \circ T = Id$. ¿es cierto que la transformación S es también una isometría? Demuestralo o da un contraejemplo.*