Tarea III

Román Contreras

15 de marzo de 2018

1. Producto interno e independencia lineal

1.1. Bases ortonormales

Ejercicio 1.1. *Sea* $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ *un conjunto de vectores ortogonales, todos diferentes del vector* $\vec{0}$*.*

Demuestra que β *es un conjunto linealmente independiente.*

Ejercicio 1.2. *Sea* Π *un plano que pasa por el origen. Demuestra que existe una base ortonormal* $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ *tal que* $\vec{w}_1$ *y* $\vec{w}_2$ *están en* Π *y cualquier vector en el plano* Π *es una combinación lineal de* $\vec{w}_1$ *y* $\vec{w}_2$*.*

Ejercicio 1.3. *Sea* $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *un conjunto de vectores. Sean* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *dos vectores. Demuestra que si cada vector del conjunto* β *es una combinación lineal de los vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *entonces* β *es un conjunto linealmente dependiente.*

1.2. Ángulo entre vectores

Recordemos la desigualdad de *Cauchy-Schwartz* que es válida para cualesquiera dos vectores $\vec{v}$ $\vec{w}$:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$$

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores no nulos.

Ejercicio 1.4. *Demuestra que la cantidad*

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}$$

está entre -1 *y* 1*.*

Definimos el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como el *único* ángulo entre 0 y π $\alpha_{\vec{v}\vec{w}}$ tal que

$$\cos(\alpha_{\vec{v}\vec{w}}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}$$

dicho de otro modo,

$$\alpha_{\vec{v}\vec{w}} = \operatorname{arcos}\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|} \right)$$

Ejercicio 1.5.

- *Sea* $\lambda > 0$ *un real positivo. Demuestra que el ángulo entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *es el mismo que entre* $\lambda\vec{v}$ *y* $\vec{w}$.

- *Demuestra que el ángulo entre* $\vec{-v}$ *y* $\vec{w}$ *es* $\pi - \alpha_{\vec{v}\vec{w}}$

- *Demuestra que* $\alpha_{\vec{v}\vec{w}} = \alpha_{\vec{w}\vec{v}}$

- *Demuestra que si el ángulo entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *es* 0 *entonces existe* $\lambda > 0$ *tal que* $\lambda\vec{v} = \vec{w}$.

- *Demuestra que si el ángulo entre* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *es* π *entonces existe* $\lambda < 0$ *tal que* $\lambda\vec{v} = \vec{w}$.

Ejercicio 1.6. *Demuestra la ley de cosenos:*

Si $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son dos vectores no colineales tales que* $\|\vec{v}\| = a$ *y* $\|\vec{w}\| = b$ *y* $\|\vec{v} - \vec{w}\| = c$, *entonces*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha_{\vec{v}\vec{w}})$$