Tarea III
Opcional

Román Contreras

19 de marzo de 2018

1. Gram-Schmidt y producto interno

El objetivo de esta tarea es proveerles de un repertorio de ejercicios, la mayoría enfocados a hacer cálculos explícitos y a practicar la aplicación del algoritmo de Gram-Schmidt, con el fin de que adquieran destreza y naturalidad a la hora de trabajar con el producto interior.

Esta tarea NO se entrega y no forma parte del conteo global de ejercicios, sin embargo, pueden pedir ayuda para resovlerla, o también pueden pedir que sea revisada.

1.1. Gram-Schmidt

En lo sucesivo, fijemos una base ortonormal $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Para simplificar la notación, cuando nos refiramos a las coordenadas con respecto a la base β de un vector omitiremos la referencia a la base β, es decir, en vez de escribir $\vec{v}_\beta = (a, b, c)$, escribiremos $\vec{v} = (a, b, c)$.

Dicho de otro modo, tácitamente estamos identificando la terna de números (a, b, c) con el vector $a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3$.

Cuando usemos otra base diferente a β, lo haremos explícito.

Ejercicio 1.1. *Aplica el algoritmo de Gram-Schmidt a las siguientes ternas de vectores. Observa que no en todas es posible obtener una base ortonormal.*

1. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}, -\frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{2}\right)$
2. $(-3, -\sqrt{3}, 2) \left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right) \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{4} + \sqrt{3}\right)$
4. $\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) \left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, -2\right) \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$
5. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}\right) \left(-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{3}, -\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)$
6. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \left(-\frac{5\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{6}}{8}, \frac{1}{4}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} + 1, -\frac{1}{4} + \sqrt{3}\right) \left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$

8. $\left(0, \quad \sqrt{2}, \quad 1\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1\right) \left(0, \quad \sqrt{2}, \quad 0\right)$

9. $(1, \quad 0, \quad 1)\,(1, \quad 1, \quad 1)\,(1, \quad 1, \quad 0)$

10. $(\cos(\pi/3), \quad 0, \quad \sin(\pi/3))\,(1, \quad 1, \quad 1)\,(-\sin(\pi/3), \quad 1, \quad \cos(\pi/3))$

11. $(1, \quad 0, \quad 0)\,(1, \quad 1, \quad 0)\,(1, \quad 1, \quad 1)$

12. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \left(0, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejercicio 1.2. *En cada uno de los siguientes incisos, demuestra que los primeros tres vectores forman una base ortonormal y posteriormente aplica el algoritmo de Gram-Schmidt a los siguientes tres vectores:*

1.

$$v_1 = \left(\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
$$v_2 = \left(-\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
$$v_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{1}{2}\right)$$
$$v_1 + v_3, \quad v_1 + v_2 + v_3, \quad v_1 + v_2$$

2.

$$v_1 = \left(\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
$$v_2 = \left(-\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
$$v_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{1}{2}\right)$$

$$\cos(\pi/3)v_1 + \sin(\pi/3)v_3, \quad v_1 + v_2 + v_3, \quad -\sin(\pi/3)v_1 + \cos(\pi/3)v_3$$

3.

$$v_1 = \left(\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
$$v_2 = \left(-\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$
$$v_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{1}{2}\right)$$

$$v_1, \quad v_1 + v_2, \quad v_1 + v_2 + v_3$$

4.

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{8}, \quad \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad -\frac{3}{4} \right)$$

$$v_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{6}}{4} v_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} v_3, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{6}}{4} v_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} v_3, \quad -\frac{v_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3$$

¿Puedes encontrar alguna similitud entre los incisos 9 a 12 del ejercicio anterior y este ejercicio?