Contesta las preguntas en las hojas blancas que se te darán. Indica claramente el número de problema e inciso. No es necesario que copies la pregunta.
Puedes usar cualquier teorema o proposición demostrado en clase siempre y cuando especifiques cláramente que lo estás usando.
Justifica todas tus respuestas y afirmaciones. Redacta tus argumentos de la manera más clara posible, no es necesario que utilices símbolos lógicos.

Pregunta	1	2	3	Total
Puntos	6	8	6	20
Puntaje				

Nombre: ____________________

1. (6 Puntos) Demuestra cualquiera de las siguientes afirmaciones:
   - Si una recta ℓ es perpendicular a dos rectas distintas que se intersectan en un punto, entonces es perpendicular a todo el plano que contiene a dichas rectas.
   - Si Π es un plano y $P \in \Pi$ es un punto cualquiera, entonces existe una única recta ℓ que es perpendicular a Π y $P \in \ell$. (Da una construcción explícita de dicha recta)
   - Si ℓ es una recta perpendicular a un plano Π y ℓ' es otra recta que es paralela a ℓ, entonces ℓ' es perpendicular a Π también.

2. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores. Asume que el vector $\vec{v}$ es un vector no nulo. Demuestra que:
   (a) (2 Puntos) Demuestra que el vector $\vec{w} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$ es un vector ortogonal a $\vec{v}$. Concluye que existe un real λ y un vector $\vec{z}$ tal que $\vec{w} = \vec{z} + \lambda\vec{v}$ y $\vec{z}$ es ortogonal a $\vec{v}$.
   (b) (2 Puntos) Usando el ejercicio anterior demuestra que $\|\vec{w}\| \geq |\lambda| \, \|\vec{v}\|$. (Sugerencia: calcula $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$.)
   (c) (3 Puntos) Demuestra que $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$. (Sugerencia: calcula $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ usando que $\vec{w} = \vec{z} + \lambda\vec{v}$ como en el primer inciso y utiliza el inciso dos)
   (d) (1 Punto) Demuestra que si $\vec{v} = 0$, la desigualdad anterior sigue siendo cierta, es decir: $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$.
   La desigualdad $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$ es muy utilizada en matemáticas y recibe el nombre de *desigualdad de Cauchy-Schwartz.*

3. (6 Puntos) Sea $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base ortonormal. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ tres vectores tales que en la base β tienen coordendas: $\vec{v}_{1\beta} = (1, \sqrt{3}, 0)$ $\vec{v}_{2\beta} = (\sqrt{3}, 3, 1)$ $\vec{v}_{3\beta} = (2\sqrt{3}, 6, 1)$.

   Intenta utilizar el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt en los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ y explica por que falla en este caso.

Fin del exámen