Examen 4

January 10, 2018

1 Examen parcial 4 - Analítica 1

1.1 Pregunta 1

Considera la siguiente propiedad fundamental de los triángulos en el plano: Dado *cualquier* triángulo ABC en el plano, las distancias entre sus vértices cumplen que

$$d(A,B) + d(A,C) \geq d(B,C)$$

y además, la igualdad se da si y solamente si los tres puntos son colineales (es decir, existe una recta que pasa por los tres).

Usando esta propiedad demuestra que: 1. Dado cualquier tríangulo ABC, se cumple que $d(B,C) - d(A,C) \leq d(A,B)$ 1. Dados dos puntos distintos F_1 y F_2, si otro punto P cumple que $d(P,F_1) - d(P,F_2) = d(F_1,F_2)$, entonces P es colineal a F_1 y F_2.

1.1.1 Respuesta 1

Sean ABC tres puntos cualesquiera, entonces se cumple que: $d(A,B) + d(A,C) \geq d(B,C)$ por lo que $d(B,C) - d(A,C) \leq d(A,B)$.

Sean F_1, F_2 y P tres puntos, entonces $d(P,F_1) - d(P,F_2) = d(F_1,F_2)$ se cumple si y solo si $d(P,F_1) = d(F_1,F_2) + d(P,F_2)$, que a su vez se cumple si y solo si los tres puntos son colineales.

1.2 Pregunta 2

Sean $F_1 = (-1,0)$ y $F_2 = (1,0)$ dos puntos. Sea $f = \frac{1}{2}d(F_1,F_2) = 1$. Recuerda que si escogemos un nímero $a > 0$ y tal que $ a<f$, entonces el conjunto de puntos

$$\mathscr{H} := \{(x,y) \mid |d(F_1,(x,y)) - d(F_2,(x,y))| = 2a\}$$

es una hipérbola cuyos focos son los puntos F_1 y F_2. El objetivo de este ejercicio es analizar el caso en que $a = 0$ y en que $a = f$ 1. Encuentra todos los puntos (x,y) tales que $|d(F_1,(x,y)) - d(F_2,(x,y))| = 0$ 2. Encuentra todos los puntos (x,y) tales que $|d(F_1,(x,y)) - d(F_2,(x,y))| = 2f$. Sugerencia: utiliza el ejercicio anterior

1.2.1 Respuesta 2

1. Un punto (x,y) satisface $|d(F_1,(x,y)) - d(F_2,(x,y))| = 0$ si y solo si $d(F_1,(x,y)) = d(F_2,(x,y))$, es decir, si y solo si está en la mediatriz del segmento F_1F_2, es decir los puntos que satisfacen la condición son el eje y

Alternativamente, se pueden hacer las siguientes cuentas:
La identidad $|d(F_1,(x,y)) - d(F_2,(x,y))| = 0$ es equivalente a

$$\sqrt{y^2 + (x+1)^2} = \sqrt{y^2 + (x-1)^2}$$

que es equivalente a

$$x^2 + 2x + y^2 + 1 = x^2 - 2x + y^2 + 1$$

y a su vez es equivalente a

$$x = 0$$

Para le **inciso 2**, una opción es notar que $2f$ es exáctamente la distancia entre F_1 y F_2, por lo que la condición implica que

$$d(F_1,(x,y)) - d(F_2,(x,y)) = d(F_1,F_2)$$

es cierto, o bien

$$d(F_2,(x,y)) - d(F_1,(x,y)) = d(F_1,F_2)$$

en cualquier caso, por el ejercicio anterior, (x,y) es colineal a F_1 y F_2, es decir, $y = 0$ ahora bien, la distancia de $(x,0)$ a F_1 y F_2 es $|x-1|$ y $|x+1|$ por lo que, si $x \geq 1$ la condición original se reduce a $(x+1) - (x-1) = 2$ que es cierto.

Análogamente, si $x \leq -1$, la condición original se traduce a $-(x-1) + (x+1) = 2$ que de nuevo es cierto.

Por otro lado, si $-1 < x < 1$, entonces tanto $|x-1|$ como $|x+1|$ son menores que 2, por lo que su diferencia lo es también, es decir, dichos puntos **no cumplen la condición**. Con eso se concluye que

$$\{(x,0)\ \ |x \leq -1 \text{ o } 1 \leq x\}$$

es el conjunto buscado.

En este caso, también se puede hacer "algebraicamente":

$$\left(-\sqrt{y^2 + (x-1)^2} + \sqrt{y^2 + (x+1)^2}\right)^2 = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1}\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} + 2 = 4$$

$$-2\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1}\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} = -2x^2 - 2y^2 + 2$$

Elevando al cuadrado ambos lados

$$4x^4 + 8x^2y^2 - 8x^2 + 4y^4 + 8y^2 + 4 = 4x^4 + 8x^2y^2 - 8x^2 + 4y^4 - 8y^2 + 4$$

$$16y^2 = 0$$

Con lo que llegamos a la condición $y = 0$, sin embargo, esto no es suficiente, dado que al elevar al cuadrado para quitar los radicales, si el lado derecho no tiene el signo adecuado, ese paso no es reversible. En este caso, necesitamos que $-2x^2 - 2y^2 + 2$ sea negativo. Además, ya sabemos que $y = 0$ por lo que la condición se reduce a $2 - 2x^2 \leq 0$

$$-2x^2 + 2$$

$$(1 \leq x \wedge x < \infty) \vee (x \leq -1 \wedge -\infty < x)$$

Es decir, recuperamos la condición $x \leq -1$ o $1 \leq x$

1.3 Pregunta 3

Sean $F_1 = (-1, 0)$ y $F_2 = (1, 0)$ dos puntos. Sea $f = \frac{1}{2}d(F_1, F_2) = 1$. Sea $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Encuentra la ecuación de la hipérbola

$$\mathscr{H} := \{(x, y) \mid |d(F_1, (x, y)) - d(F_2, (x, y))| = 2a\}$$

1.3.1 Respuesta

Una opción es usar lo visto en clase para encontrar el valor de b usando la fórmula

$$b^2 = f^2 - a^2$$

que en este caso es:

$$b^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

es decir, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$$

es decir

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$$

o lo que es lo mismo

$$2x - 2y = 1$$

La otra opción es hacerlo todo algebraicamente (aunque esto solo es un caso particular de como se deriva la ecuación de la hipérbola)

$$\left(-\sqrt{y^2 + (x-1)^2} + \sqrt{y^2 + (x+1)^2}\right)^2 = 2$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1}\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} + 2 = 2$$

$$-2\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1}\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} = -2x^2 - 2y^2$$

$$4x^4 + 8x^2y^2 - 8x^2 + 4y^4 + 8y^2 + 4 = 4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$$

$$-8x^2 + 8y^2 + 4 = 0$$

$$8x^2 - 8y^2 = 4$$

$$2x^2 - 2y^2 = 1$$

1.4 Pregunta 4

Considera la ecuación:

1. Si $P_1 = (u_1, u_2)$ y $P_2 = (v_1, v_2)$ son los dos vectores unitarios de un nuevo sistema de coordenadas, escribe la condición que deben satisfacer para que la ecuación no tenga término cruzado en dichas nuevas coordenadas.
2. Escribe la ecuación caracterísica para λ que permite encontrar los vectores P_1 y P_2
3. Encuentra los vectores P_1 y P_2
4. Escribe la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas (en las coordenadas w y z)
5. Describe geométricamente el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación. (¿es una elipse o una hipébola?, ¿dónde están sus focos? etc)

Aquí hay cuatro opciones para la ecuación, mismas que se obtienen de dos posibles ecuaciones bajo dos posibles rotaciones:

La ecuación 1 es $x^2 + 3y^2 = 1$ y la ecuación 2 es $x^2 - 4y^2 = 1$

Las dos rotaciones eran a 45 grados y a 30 grados.

Para obtener las cuatro ecuaciones posibles, definimos las matrices simétricas asociadas y las matrices de rotación:

Matriz 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación 1

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación 2

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz rotada 1: es la matriz 1 con la rotacion 1

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Ecuación 1

$$\frac{3x^2}{2} - \sqrt{3}xy + \frac{5y^2}{2}$$

Matriz rotada 2: es la matriz 1 con la rotacion 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2

$$2x^2 - 2xy + 2y^2$$

Matriz rotada 3: es la matriz 2 con la rotacion 1

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{5\sqrt{3}}{4} & -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

Ecuación 3

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2}\sqrt{3}y - \frac{11y^2}{4}$$

Matriz rotada 4: es la matriz 2 con la rotacion 2

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Ecuación 3

$$-\frac{3x^2}{2} + 5xy - \frac{3y^2}{2}$$

1.5 Respuesta

Para el inciso 1, bastaba que recordaran lo visto en clase, es decir, que el vector (u_1, u_2) debía ser paralelo al vector $(au_1 + \frac{c}{2}u_2, \frac{c}{2}u_1 + bu_2)$ con a, b y c los coeficientes de x^2, y^2 y xy respectivamente.

Alternativamente, se podía hacer de nuevo la deducción de ese hecho. Para eso, usamos la matríz de rotación dada por los vectores P_1 y P_2

ecuación rotada 1

$$w^2\left(\frac{3u_1^2}{2} - \sqrt{3}u_1u_2 + \frac{5u_2^2}{2}\right) + wz\left(3u_1v_1 - \sqrt{3}u_1v_2 - \sqrt{3}u_2v_1 + 5u_2v_2\right) + z^2\left(\frac{3v_1^2}{2} - \sqrt{3}v_1v_2 + \frac{5v_2^2}{2}\right)$$

Término cruzado ecuación 1

$$\frac{3u_1}{2}v_1 - \frac{u_1v_2}{2}\sqrt{3} - \frac{u_2v_1}{2}\sqrt{3} + \frac{5u_2}{2}v_2$$

$$v_1\left(\frac{3u_1}{2} - \frac{\sqrt{3}u_2}{2}\right) + v_2\left(-\frac{\sqrt{3}u_1}{2} + \frac{5u_2}{2}\right)$$

Es decir, si queremos que en el nuevo sistema, el término cruzado sea 0, necesitamos que la ultima expresión sea cero, esto se traduce a que el vector $\left(\frac{3u_1}{2} - \frac{\sqrt{3}u_2}{2}, -\frac{\sqrt{3}u_1}{2} + \frac{5u_2}{2}\right)$ sea ortogonal al vector (v_1, v_2), es decir, paralelo al vector (u_1, u_2). También consideré la respuesta como válida si decían que el término cruzado en wz tenía que ser cero.

$$\begin{bmatrix} u_1\left(-\lambda + \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}u_2}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}u_1}{2} + u_2\left(-\lambda + \frac{5}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda + \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\lambda + \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

las raices

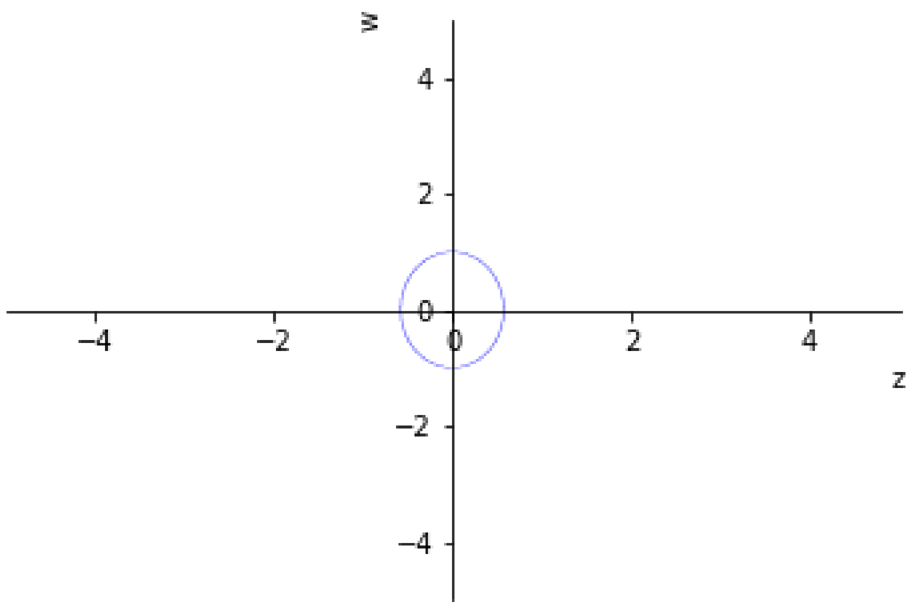
$$1$$

$$3$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



El resto de las soluciones las obtenemos con la función definida hasta el final. El procedimiento es el mismo que para la ecuación que ya se resolvió.

1.5.1 Solución de la ecuación 2:

Ecuación original:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2$$

Ecuación en w, z:

$$w^2\left(2u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_2^2\right) + wz\left(4u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 4u_2v_2\right) + z^2\left(2v_1^2 - 2v_1v_2 + 2v_2^2\right)$$

término cruzado en w, z:

$$2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2$$

factorizando v_1 y v_2:

$$v_1\left(2u_1 - u_2\right) + v_2\left(-u_1 + 2u_2\right)$$

vector que es paralelo al vector P_1:

$$\begin{bmatrix} 2u_1 - u_2 \\ -u_1 + 2u_2 \end{bmatrix}$$

ecuación de paralelismo entre el vector anterior y P_1:

$$\begin{bmatrix} 2u_1 - u_2 \\ -u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

misma ecuación igualada a 0

$$\begin{bmatrix} -\lambda u_1 + 2u_1 - u_2 \\ -\lambda u_2 - u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vectores que son perpendiculares a P_1:

$$\begin{bmatrix} -\lambda + 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\lambda + 2 \end{bmatrix}$$

Por lo que ellos son paralelos entre si y el área que determinan es cero:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

dicho polinomio se factoriza como:

$$\left(\lambda - 3\right)\left(\lambda - 1\right)$$

Es decir, sus raices son:

$$1$$

$$3$$

Tomando cualquiera de los vectores que eran perpendiculares a P_1, obtenemos P_2 sustituyendo cualquiera de las raices del polinomio para λ y normalizando:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que tiene norma:

$$\sqrt{2}$$

Por lo que P_2 es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

y el vector P_1 lo obtenemos rotando 90 el vector P_2:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

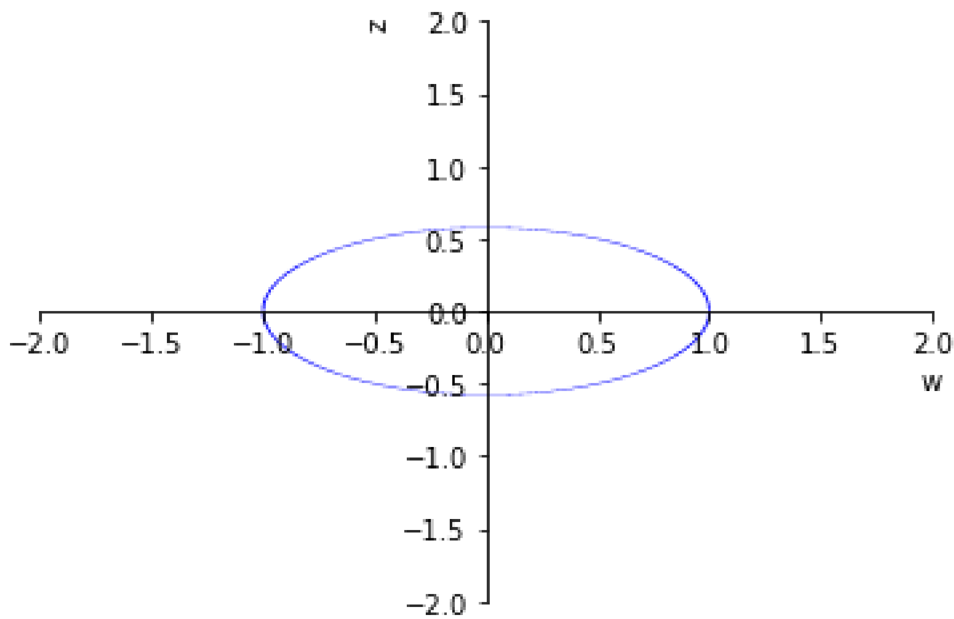
con esos nuevos vectores, la ecuación en w y z queda:

$$w\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}w}{2}-\frac{3z}{2}\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}w}{2}+\frac{3z}{2}\sqrt{2}\right)\right)+$$
$$+z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}w}{2}-\frac{3z}{2}\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}w}{2}+\frac{3z}{2}\sqrt{2}\right)\right)$$

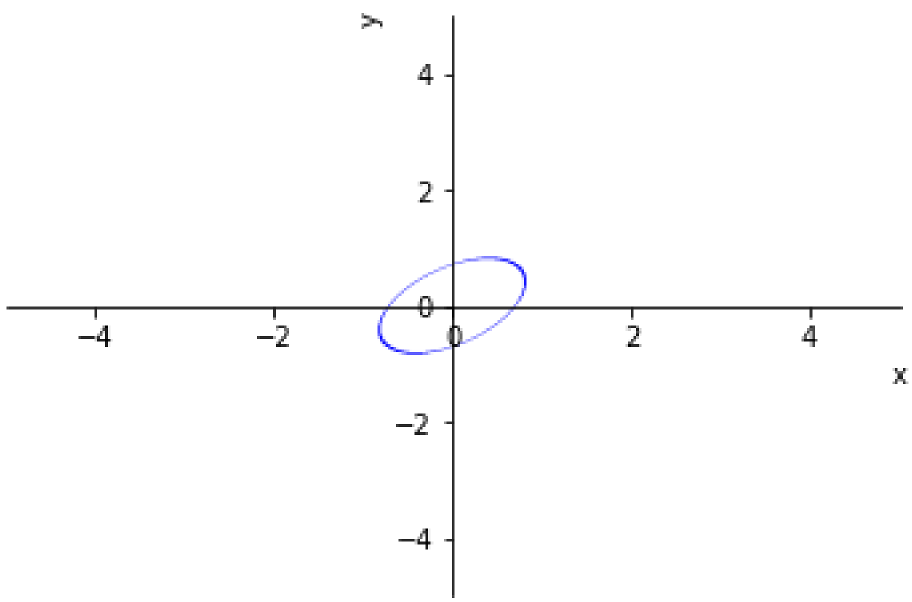
que simplificando, queda:

$$w^2+3z^2$$

como se buscaba. Finalmente, la ecuación corresponde a



Es decir, una elipse, como los vectores P_1 y P_2 determinan un sistema a 45, entonces la elipse original estaba a 45:



1.5.2 Solución de la ecuación 3:

Ecuación original:

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{5x}{2}\sqrt{3}y-\frac{11y^2}{4}$$

Ecuación en w, z:

$$w^2\left(-\frac{u_1^2}{4}+\frac{5u_1}{2}\sqrt{3}u_2-\frac{11u_2^2}{4}\right)+wz\left(-\frac{u_1v_1}{2}+\frac{5u_1}{2}\sqrt{3}v_2+\frac{5u_2}{2}\sqrt{3}v_1-\frac{11u_2}{2}v_2\right)+z^2\left(-\frac{v_1^2}{4}+\frac{5v_1}{2}\sqrt{3}v_2-\frac{11v_2^2}{4}\right)$$

término cruzado en w, z:

$$-\frac{u_1v_1}{4}+\frac{5u_1}{4}\sqrt{3}v_2+\frac{5u_2}{4}\sqrt{3}v_1-\frac{11u_2}{4}v_2$$

factorizando v_1 y v_2:

$$v_1\left(-\frac{u_1}{4}+\frac{5u_2}{4}\sqrt{3}\right)+v_2\left(\frac{5u_1}{4}\sqrt{3}-\frac{11u_2}{4}\right)$$

vector que es paralelo al vector P_1:

$$\begin{bmatrix} - \frac{u_1}{4} + \frac{5u_2}{4}\sqrt{3} \\ \frac{5u_1}{4}\sqrt{3} - \frac{11u_2}{4} \end{bmatrix}$$

ecuación de paralelismo entre el vector anterior y P_1:

$$\begin{bmatrix} - \frac{u_1}{4} + \frac{5u_2}{4}\sqrt{3} \\ \frac{5u_1}{4}\sqrt{3} - \frac{11u_2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

misma ecuación igualada a 0

$$\begin{bmatrix} -\lambda u_1 - \frac{u_1}{4} + \frac{5u_2}{4}\sqrt{3} \\ -\lambda u_2 + \frac{5u_1}{4}\sqrt{3} - \frac{11u_2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vectores que son perpendiculares a P_1:

$$\begin{bmatrix} -\lambda - \frac{1}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{4} & -\lambda - \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

Por lo que ellos son paralelos entre si y el área que determinan es cero:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

dicho polinomio se factoriza como:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 4)$$

Es decir, sus raices son:

$$-4$$

$$1$$

Tomando cualquiera de los vectores que eran perpendiculares a P_1, obtenemos P_2 sustituyendo cualquiera de las raices del polinomio para λ y normalizando:

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

que tiene norma:

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que P_2 es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y el vector P_1 lo obtenemos rotando 90 el vector P_2:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

con esos nuevos vectores, la ecuación en w y z queda:

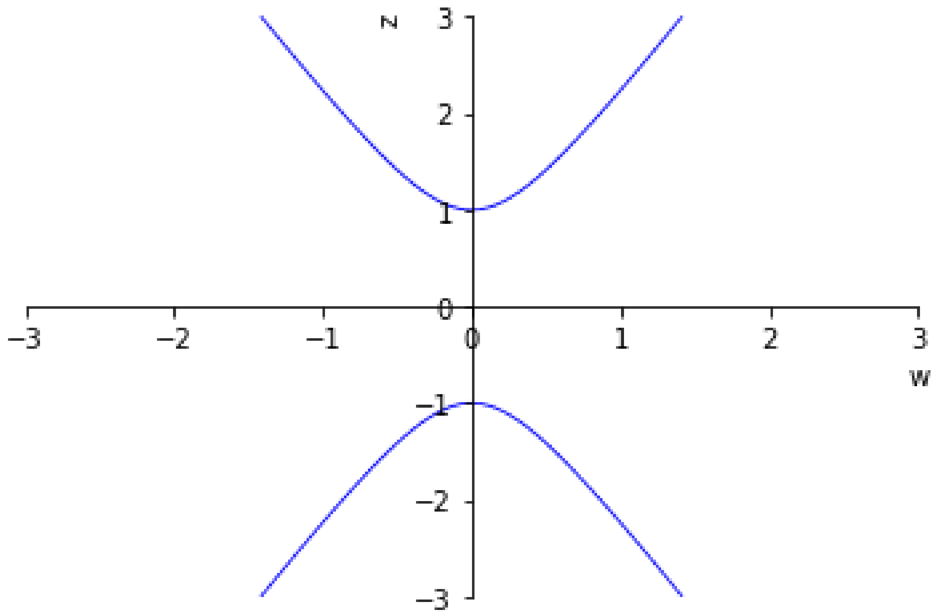
$$w\left(-\frac{w}{16}-\frac{\sqrt{3}z}{16}+\frac{5\sqrt{3}}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}w}{2}+\frac{z}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{11w}{8}\sqrt{3}-\frac{11z}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\left(\frac{w}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)\right)\right)+$$

$$+z\left(\frac{11w}{16}\sqrt{3}-\frac{11z}{16}+\frac{5\sqrt{3}}{8}\left(\frac{w}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{w}{8}-\frac{\sqrt{3}z}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}w}{2}+\frac{z}{2}\right)\right)\right)$$

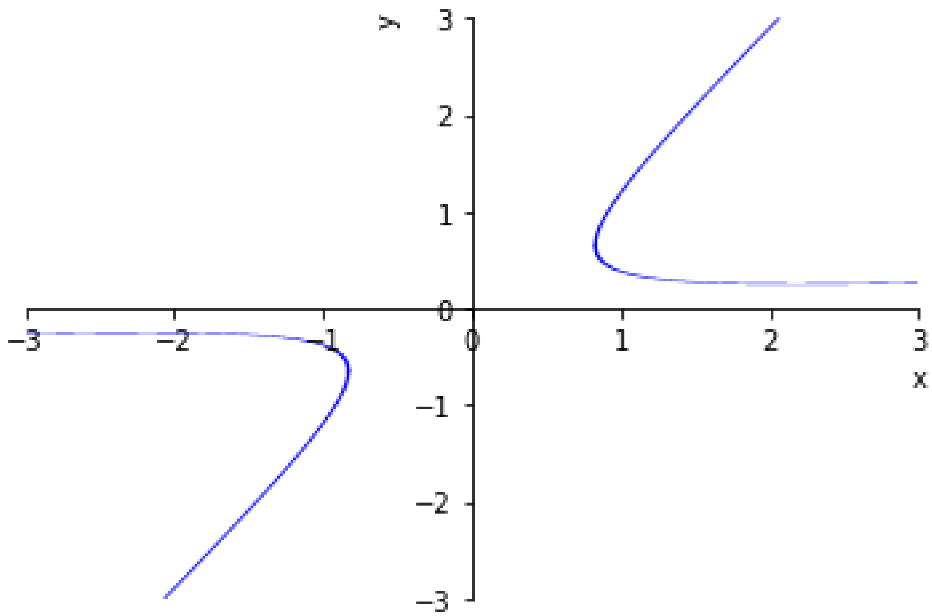
que simplificando, queda:

$$-4w^2+z^2$$

como se buscaba. Finalmente, la ecuación corresponde a



Es decir, una hipérbola, como los vectores P_1 y P_2 determinan un sistema a 60, entonces la hipérbola original estaba a 60:



1.5.3 Solución de la ecuación 4:

Ecuación original:

$$-\frac{3x^2}{2} + 5xy - \frac{3y^2}{2}$$

Ecuación en w, z:

$$w^2\left(-\frac{3u_1^2}{2} + 5u_1u_2 - \frac{3u_2^2}{2}\right) + wz\left(-3u_1v_1 + 5u_1v_2 + 5u_2v_1 - 3u_2v_2\right) + z^2\left(-\frac{3v_1^2}{2} + 5v_1v_2 - \frac{3v_2^2}{2}\right)$$

término cruzado en w, z:

$$-\frac{3u_1}{2}v_1 + \frac{5u_1}{2}v_2 + \frac{5u_2}{2}v_1 - \frac{3u_2}{2}v_2$$

factorizando v_1 y v_2:

$$v_1\left(-\frac{3u_1}{2} + \frac{5u_2}{2}\right) + v_2\left(\frac{5u_1}{2} - \frac{3u_2}{2}\right)$$

vector que es paralelo al vector P_1:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3u_1}{2} + \frac{5u_2}{2} \\ \frac{5u_1}{2} - \frac{3u_2}{2} \end{bmatrix}$$

ecuación de paralelismo entre el vector anterior y P_1:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3u_1}{2} + \frac{5u_2}{2} \\ \frac{5u_1}{2} - \frac{3u_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

misma ecuación igualada a 0

$$\begin{bmatrix} -\lambda u_1 - \frac{3u_1}{2} + \frac{5u_2}{2} \\ -\lambda u_2 + \frac{5u_1}{2} - \frac{3u_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vectores que son perpendiculares a P_1:

$$\begin{bmatrix} -\lambda - \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\lambda - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo que ellos son paralelos entre si y el área que determinan es cero:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

dicho polinomio se factoriza como:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 4)$$

Es decir, sus raices son:

$$-4$$

$$1$$

Tomando cualquiera de los vectores que eran perpendiculares a P_1, obtenemos P_2 sustituyendo cualquiera de las raices del polinomio para λ y normalizando:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

que tiene norma:

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Por lo que P_2 es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

y el vector P_1 lo obtenemos rotando 90 el vector P_2:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

con esos nuevos vectores, la ecuación en w y z queda:

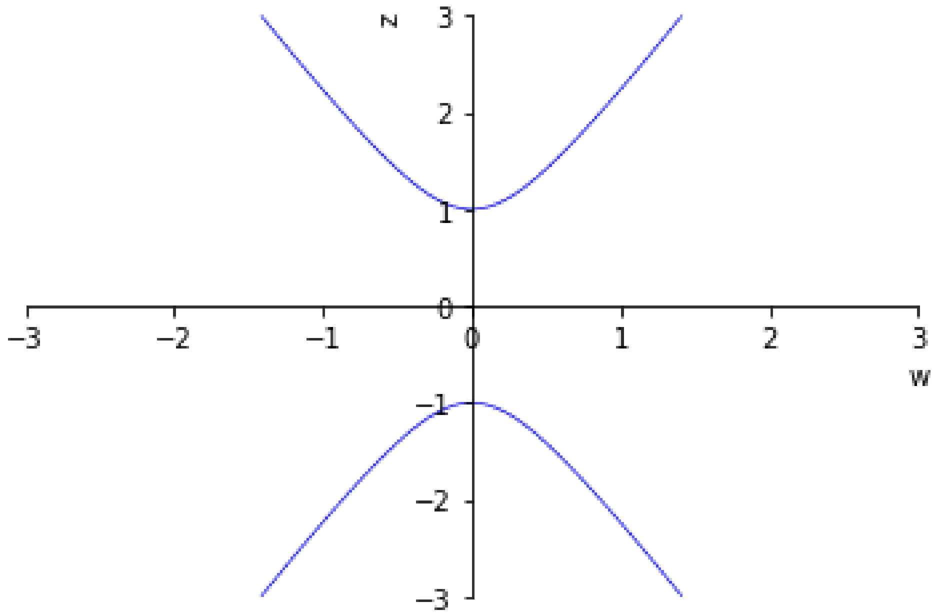
$$w\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2\sqrt{2}w + \frac{\sqrt{2}z}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{2}w + \frac{\sqrt{2}z}{2}\right)\right) +$$

$$+z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2\sqrt{2}w+\frac{\sqrt{2}z}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{2}w+\frac{\sqrt{2}z}{2}\right)\right)$$

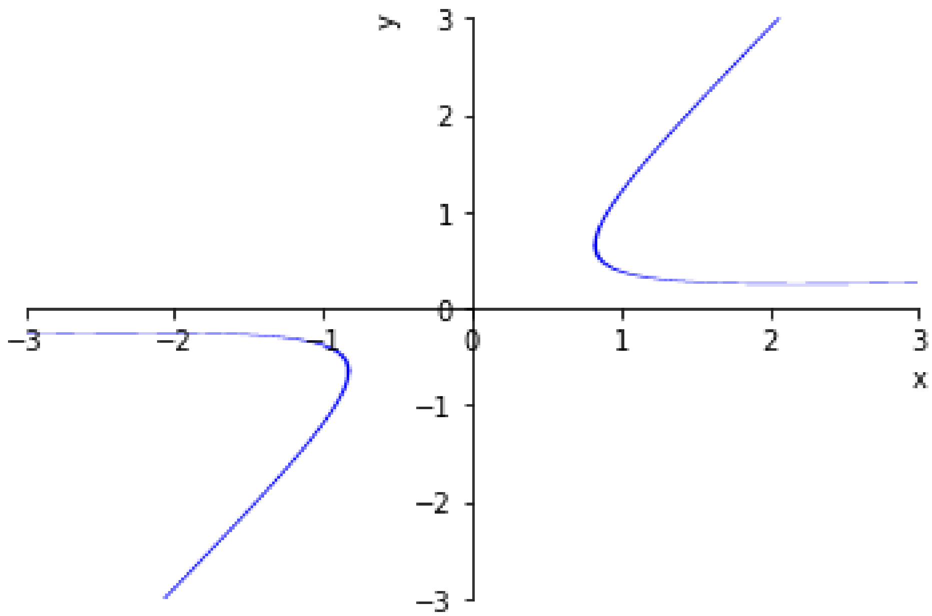
que simplificando, queda:

$$-4w^2+z^2$$

como se buscaba. Finalmente, la ecuación corresponde a



Es decir, una hipérbola, como los vectores P_1 y P_2 determinan un sistema a 60, entonces la hipérbola original estaba a 60:



y
3
2
1
0
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1
−2
−3